Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2 : correction

Exercice 1. Série harmonique (*CCINP 2024*)

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Q1. Énoncer la définition de la convergence pour une série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ de nombres réels ou complexes.

C'est du cours. On dit que la série est convergente si $\boxed{\text{la suite des sommes partielles est convergente}}$.
Autrement dit si $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ existe et est finie.

Q2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel α, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?

C'est à nouveau du cours. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente $\boxed{\text{si et seulement si } \alpha > 1}$.

Q3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$. Elle est dérivable comme somme de fonctions usuelles et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. On a $f'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff x > 0$. Ainsi

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	0	↗	

En particulier, f est positive, autrement dit $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x}$.

Q4. En déduire que

$$\forall n \geqslant 1,\ \mathrm{e}^{H_n} \geqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

puis, en remarquant l'égalité $1 + \dfrac{1}{k} = \dfrac{k+1}{k}$, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $e^{H_n} \geqslant n + 1$.

- Soit $n \geqslant 1$.

$$\mathrm{e}^{H_n} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{1/k} \overset{\textbf{Q3}}{\geqslant} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

- Comme $1 + \dfrac{1}{k} = \dfrac{k+1}{k}$, le membre de droite de l'inégalité précédente vaut $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} = n+1$ par téléscopage (on sinon on remarque que le produit des numérateurs vaut $(n+1)!$ et celui des dénominateurs $n!$ et on simplifie). Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1,\ e^{H_n} \geqslant n + 1}$.

Q5. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{H_n} = +\infty$.
En déduire la divergence de la série harmonique.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$, d'après l'inégalité de la question précédente, on obtient par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{H_n} = +\infty$. En composant par ln qui est continue, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$. Comme la suite des sommes partielles (H_n) n'admet pas une limite finie, d'après la définition rappelée en **Q1**, $\boxed{\text{la série harmonique est divergente}}$.

Exercice 2. Une suite et une série (*d'après CCINP 2019*)

Dans cet exercice, on étudie l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ où $n \in \mathbb{N}$.

Partie I - Généralités sur la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$

Q6. Calculer u_0, u_1 et u_2.

$$u_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \Big[t\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\pi}$$

$$u_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\sin t\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = \boxed{2}$$

$$u_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

Q7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos t \geqslant 0$ et donc $\cos^n(t) \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, on obtient donc $\boxed{u_n = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0}$.

Q8. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^{n+1}(t) - \cos^n(t)\right)\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^n(t)}_{\geqslant 0}\underbrace{(\cos t - 1)}_{\leqslant 0}\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$.

Q9. À l'aide d'une intégration par parties, établir que $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.
Indication : on écrira $\cos^{n+1}(t) = \cos(t) \times \cos^n(t)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En suivant l'indication, on pose $\begin{cases} u = \cos^n(t) \\ v' = \cos t \end{cases}$ et donc $\begin{cases} u' = -n\sin(t)\cos^{n-1}(t) \\ v = \sin t \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[\cos^n(t)\sin(t)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \sin^2(t)+\cos^2(t)=1 \\
&= 0 + n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\cos^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \textit{linéarité de l'intégrale} \\
&= n\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= n(u_{n-1} - u_{n+1}).
\end{aligned}$$

Finalement, $u_{n+1} = nu_{n-1} - nu_{n+1}$ d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}}$.

Q10. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
En utilisant la question précédente, vérifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n \overset{\textbf{Q9}}{=} nu_{n-1}u_n = v_{n-1}$ donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est constante}}$.
De plus, $v_0 = 1 \times u_1 \times u_0 \overset{\textbf{Q6}}{=} 2\pi$ d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2\pi}$.

Q11. En déduire que $(n+1)u_{n+1}^2 \leqslant 2\pi \leqslant (n+1)u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après **Q8**, la suite (u_n) est décroissante, *i.e.* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Ainsi, via la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2\pi = v_n = (n+1)u_{n+1}u_n \leqslant (n+1)u_n^2 \quad \text{et aussi} \quad 2\pi = v_n = (n+1)u_{n+1}u_n \geqslant (n+1)u_{n+1}^2.$$

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)u_{n+1}^2 \leqslant 2\pi \leqslant (n+1)u_n^2}$.

Q12. Donner, à partir de la question précédente, un encadrement de u_n en fonction de n pour $n \geqslant 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a d'une part $\dfrac{2\pi}{n+1} \leqslant u_n^2$ et d'autre part $u_{n+1}^2 \leqslant \dfrac{2\pi}{n+1}$ donc $u_n^2 \leqslant \dfrac{2\pi}{n}$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}.$$

Q13. En déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} \leqslant 1$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} = 1$, *i.e.* $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$.

Partie II - Étude d'une série

Q14. Cas $x = 1$: la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

On a $u_n \underset{+\infty}{\overset{\textbf{Q13}}{\sim}} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}} = \sqrt{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0$. Or la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente (série de Riemann) donc, par équivalence de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est divergente}}$.

Q15. Cas $|x| < 1$: montrer que, pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, la série $\sum u_n x^n$ est absolument convergente.

Soit $x \in \left]-1\,;1\right[\setminus \{0\}$ (pour $x = 0$ la convergence est évidente).
Comme on ne connaît pas le signe de x, faisons une étude de convergence absolue. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $w_n = |u_n x^n| = u_n |x| > 0$. On a

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1}|x|^{n+1}}{u_n|x|^n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}|x| \underset{+\infty}{\overset{\textbf{Q13}}{\sim}} \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{n+1}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}}|x| = |x|\sqrt{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| < 1.$$

Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum |u_n x^n|$ est convergente, *i.e.* $\sum u_n x^n$ est absolument convergente et donc $\boxed{\sum u_n x^n \text{ est convergente}}$.

Pour la suite, on note $S(x)$ la somme de cette série lorsqu'elle est convergente, *i.e.* $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$.

Q16. Soient q un réel et n un entier naturel non nul. Rappeler, sans preuve, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k$ pour $q \neq 1$. Que vaut cette somme si $q = 1$?

Si $q \neq 1$, on a $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}}$.

Si $q = 1$, on a $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 1^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n}$.

Q17. Établir la formule suivante pour tout nombre entier naturel non nul n et tout nombre réel $x \in \left]-1\,;1\right[$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)} - x^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^n(t)}{1 - x\cos(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]-1\,;1\right[$. En commençant par la définition de u_k, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(t)\,\mathrm{d}t\right) x^k && \textit{linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} (x\cos t)^k\,\mathrm{d}t && \textit{somme géométrique, cf } \textbf{\textit{Q16}} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - (x\cos(t))^n}{1 - x\cos t}\,\mathrm{d}t && \textit{linéarité de l'intégrale} \\
&= \boxed{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)} - x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)}{1 - x\cos(t)}\,\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

Q18. En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}$ pour tout $|x| < 1$.

Comme $\left|\cos^n(t)\right| \leqslant 1$ et $1 - x\cos t \geqslant 0$ (car $|x| < 1$), on a

$$0 \leqslant \left| x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)}{1 - x\cos(t)}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant |x|^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}.$$

Or, comme $|x| < 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |x|^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)} = 0$. D'où, via le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)}{1 - x\cos(t)}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Ainsi, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'égalité de la question précédente, on obtient

$$\boxed{\forall x \in\,]-1\,;1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}}.$$

Q19. Soit $t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. On note $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

Montrer que $\cos(t) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin(t) = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

$$\begin{aligned}
\cos(t) &= \cos\left(\tfrac{t}{2} + \tfrac{t}{2}\right) && \textit{formule d'addition}\\
&= \cos^2\left(\tfrac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\tfrac{t}{2}\right) && \textit{mise en facteur pour faire apparaître } \tan\tfrac{t}{2}\\
&= \cos^2\left(\tfrac{t}{2}\right) \times \left[1 - \tan^2\left(\tfrac{t}{2}\right)\right] && 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}\left[1 - \tan^2\left(\tfrac{t}{2}\right)\right] && \textit{définition } u\\
&= \boxed{\frac{1-u^2}{1+u^2}}.
\end{aligned}$$

Pour $\sin(t)$, il suffit de procéder de façon analogue (à faire !).
Rappel : l'égalité $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ vient du calcul de la dérivée de $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et en simplifiant la fraction obtenue de deux façons distinctes.

Q20. Montrer que $S(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{(1-x) + (1+x)u^2}\,\mathrm{d}u$ pour $|x| < 1$ à l'aide du changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

On a $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right) \iff t = 2\arctan(u)$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Ce changement de variable est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k \overset{\text{Q18}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)} \\ &\overset{\text{Q19}}{=} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1 - x\frac{1-u^2}{1+u^2}} \times \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1 + u^2 - x(1-u^2)} \\ &= \boxed{\int_{-1}^{1} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1 - x + (1+x)u^2}}. \end{aligned}$$

Q21. En déduire l'expression de $S(x)$ pour $|x| < 1$.

Soit $x \in \left]-1\,;1\right[$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_{-1}^{1} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1 - x + (1+x)u^2} \\ &= \frac{2}{1-x} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1 + \frac{1+x}{1-x}u^2} \\ &= \frac{2}{1-x} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1 + \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,u\right)^2} \\ &= \frac{2}{1-x} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \arctan\!\left(\sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}}\,u\right) \right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{1-x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(\arctan\!\left(\sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}}\right) - \arctan\!\left(-\sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}}\right) \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \times 2\arctan\!\left(\sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}}\right) \qquad \text{arctan est impaire} \\ &= \boxed{\frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\!\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)}. \end{aligned}$$

Exercice 3. Autour des matrices nilpotentes (*d'après EPITA 2024*)
Dans ce problème on s'intéresse aux matrices nilpotentes. Dans une première partie on étudie un exemple, dans la seconde on démontre différentes propriétés concernant les matrices nilpotentes, et enfin, dans une dernière partie on s'intéresse à l'exponentielle d'une matrice nilpotente.

On définit les notations suivantes :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Définitions : Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $N^p = 0_n$, on dit que la matrice N est **nilpotente**. Le plus petit entier p vérifiant $N^p = 0_n$ est appelé **indice de nilpotence** de la matrice N. On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I - Étude d'une matrice nilpotente

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q22. La matrice A est-elle inversible ?

On remarque que la troisième colonne de A vaut trois fois la seconde donc $\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$.

Q23. Montrer que A est nilpotente. On précisera son indice de nilpotence.

On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \neq 0_3$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$ donc $\boxed{A \text{ est nilpotente d'indice } 3}$.

Q24. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(X_1)$ où X_1 est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ à préciser.

Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Ker}(A)$ si et seulement si $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, *i.e.*

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 5x + 2y + 6z = 0 \\ -2x - y - 3z = 0 \end{cases} \underset{\mathrm{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}}{\overset{\mathrm{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} -x = 0 \\ x = 0 \\ -2x - y - 3z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3z \end{cases}$$

Ainsi un élément de $\mathrm{Ker}(A)$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ -3z \\ z \end{pmatrix}$ d'où $\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\}}$.

Q25. Soit $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $AX_2 \in \mathrm{Ker}(A)$.

Méthode 1 : On calcule $AX_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1 \in \mathrm{Ker}(A)$ d'après la question précédente.

Méthode 2 : On calcule $A \times AX_2 = A^2X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en réutilisant l'expression de A^2 obtenue en **Q23**.

Ainsi $\boxed{AX_2 \in \mathrm{Ker}(A)}$.

Q26. Déterminer un vecteur $X_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $AX_3 = X_2$.

Soit $X_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX_3 = X_2$, *i.e.*

$$\begin{cases} x + y + 3z = -1 \\ 5x + 2y + 6z = 1 \\ -2x - y - 3z = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\iff}} \begin{cases} -x = -1 \\ x = 1 \\ -2x - y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y + 3z = -2 \end{cases}$$

donc par exemple $\boxed{X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ convient}}$.

Q27. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Montrons d'abord que cette famille est libre. Soit des réels α, β et γ tels que $\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. En utilisant les coordonnées de ces trois vecteurs, on obtient

$$\begin{cases} -\beta + \gamma = 0 \\ -3\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} -\beta + \gamma = 0 \\ -\gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Ainsi $\boxed{\text{la famille } (X_1, X_2, X_3) \text{ est libre}}$.

De plus, cette famille est constituée de trois vecteurs et on sait que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc il s'agit d'une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}^3}$.

Q28. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

D'après **Q24**, $AX_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$; d'après **Q25**, $AX_2 = X_1$ et par définition de X_3, $AX_3 = X_2$ donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

Partie II - Quelques propriétés des matrices nilpotentes

Inversibilité

Q29. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que si M est nilpotente alors M n'est pas inversible.

Soient $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ et p son indice de nilpotence. En particulier, $N^p = 0_n$.
Supposons par l'absurde que N est inversible. Alors en multipliant l'égalité précédente par $(N^{-1})^{p-1}$, il reste $N = 0_n$, ce qui est manifestement en contradiction avec le caractère inversible de N.
Ainsi $\boxed{\text{une matrice nilpotente n'est pas inversible}}$.

Q30. Soient $n \geqslant 2$ et $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Montrer que J_n n'est pas inversible et qu'elle n'est pas nilpotente.

- Tout d'abord, comme J_n a toutes ses colonnes égales, $\boxed{J_n \text{ n'est pas inversible}}$.
- En calculant les premières puissances de J_n et par récurrence immédiate, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $J_n^k = n^{k-1} J_n \neq 0_n$ donc $\boxed{J_n \text{ n'est pas nilpotente}}$.

Indice de nilpotence

Q31. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ d'indice de nilpotence p. Justifier qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $M^{p-1}X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, puis montrer alors que la famille $\big(X, MX, \dots, M^{p-1}X\big)$ est libre.

> • Par définition p est le plus petit entier tel que $M^p = 0_n$, par conséquent $M^{p-1} \neq 0_n$ et en particulier il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $M^{p-1}X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.
>
> • Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ des réels tels que $\lambda_0 X + \lambda_1 MX + \dots + \lambda_{p-1}M^{p-1}X = 0_{\mathbb{R}^n}$. En multipliant cette égalité à gauche par M^{p-1}, on obtient $\lambda_0 M^{p-1}X + \lambda_1 M^p X + \dots + \lambda_{p-1}M^{2(p-1)}X = 0_{\mathbb{R}^n}$. Or M est nilpotente d'indice p donc pour tout $k \geqslant p$, $M^k = 0_n$. Il ne reste donc que $\lambda_0 M^{p-1}X = 0_{\mathbb{R}^n}$, d'où $\lambda_0 = 0$ car $M^{p-1}X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ d'après le point précédent.
>
> On procède de même en multipliant par M^{p-2} et on obtient $\lambda_1 = 0$, et ainsi de suite. Finalement $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$ donc $\boxed{\text{la famille } \big(X, MX, \dots, M^{p-1}X\big) \text{ est libre}}$.

Q32. En déduire que l'indice de nilpotence vérifie l'inégalité $p \leqslant n$.

> Soit M nilpotente d'indice p et supposons par l'absurde que $p > n$. D'après la question précédente, la famille $\big(X, MX, \dots, M^{p-1}X\big)$ est libre. Or on sait qu'une famille libre de $\mathbb{R}^n$ contient au maximum $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ vecteurs. Comme on a supposé $p > n$, on aboutit à une contradiction. Ainsi nécessairement $\boxed{p \leqslant n}$.

Q33. En déduire que pour toute $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, $M^n = 0_n$.

> Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ et p son indice de nilpotence. D'après la question précédente, $p \leqslant n$, *i.e.* $n - p \geqslant 0$ donc $M^n = M^p \times M^{n-p} = 0_n \times M^{n-p} = \boxed{0_n}$.

Q34. Montrer que si $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ alors la matrice $M = \mathrm{I}_n - N$ est inversible et $M^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} N^k$.

> *Méthode : Comme l'inverse est proposé, on vérifie que $M \times M^{-1} = \mathrm{I}_n$.*
>
> Soient $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ et $M = \mathrm{I}_n - N$. On a
>
> $$\begin{aligned} M \times \sum_{k=0}^{n-1} N^k &= (\mathrm{I}_n - N)\sum_{k=0}^{n-1} N^k && \textit{distributivité} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} N^k - \sum_{k=0}^{n-1} N^{k+1} && j = k+1 \textit{ dans la seconde} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} N^k - \sum_{j=1}^{n} N^j && \textit{téléscopage} \\ &= N^0 - N^n && \textit{question précédente} \\ &= \mathrm{I}_n. \end{aligned}$$
>
> Par conséquent $\boxed{M \text{ est inversible et } M^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} N^k}$.

Stabilité par somme et produit

Q35. Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont des éléments de $\mathcal{N}_2(\mathbb{R})$. L'ensemble $\mathcal{N}_2(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ?

- Par calcul, on a directement $\boxed{B^2 = 0_2 \text{ et } C^2 = 0_2}$ donc $B,\, C \in \mathcal{N}_2(\mathbb{R})$.
- On a $B+C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ d'où $(B+C)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq 0_2$. Ainsi $B+C \notin \mathcal{N}_2(\mathbb{R})$ (car d'après **Q32** l'indice de nilpotence ici vaudrait au maximum 2). En particulier $\mathcal{N}_2(\mathbb{R})$ n'est pas stable par combinaison linéaire donc $\boxed{\mathcal{N}_2(\mathbb{R}) \text{ n'est pas un espace vectoriel}}$.

Q36. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. Montrer que $MN \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$.

Soient $M,\, N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$. En particulier, d'après **Q33**, $M^n = N^n = 0_n$. De plus, comme M et N commutent, on a $(MN)^n = M^n \times N^n = 0_n \times 0_n = 0_n$ donc $\boxed{MN \text{ est nilpotente}}$.

Q37. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. Montrer que $M + N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$.

Soient $M,\, N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$. Comme M et N commutent, d'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(M+N)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} M^k N^{2n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} M^k N^{2n-k} + \sum_{k=n}^{2n} \binom{2n}{k} M^k N^{2n-k}.$$

Dans la dernière somme, on a toujours $k \geqslant n$ donc $M^k = 0_n$, et dans l'avant-dernière $2n - k \geqslant n$ donc $N^{2n-k} = 0_n$. Ainsi $(M+N)^{2n} = 0_n$ donc $\boxed{MN \text{ est nilpotente}}$.

Partie III - Exponentielle de matrices nilpotentes

Pour $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, on définit l'exponentielle de M comme la matrice $\exp(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$.

Q38. Vérifier que $\exp(0_n) = \mathrm{I}_n$.

On a $0_n^0 = \mathrm{I}_n$ puis, pour tout $k \geqslant 1$, $0_n^k = 0_n$ donc $\exp(\mathrm{I}_n) = \dfrac{1}{0!}\mathrm{I}_n + 0_n = \boxed{\mathrm{I}_n}$.

Q39. Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Justifier que $T \in \mathcal{N}_3(\mathbb{R})$ et montrer que $\exp(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Par calculs, on a $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $T^3 = 0_3$ donc $\boxed{T \in \mathcal{N}_3(\mathbb{R})}$. De plus, par définition

$$\exp(T) = \frac{1}{0!}\mathrm{I}_3 + \frac{1}{1!}T + \frac{1}{2!}T^2 + \frac{1}{3!}T^3 = \mathrm{I}_3 + T + \frac{1}{2}T^2 + 0_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q40. Soit $k \in \mathbb{N}$. On considère des matrices $M_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies pour tout entier $i \in [\![0\,;k]\!]$ et tout entier $j \in [\![0\,;k]\!]$. Montrer que

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} M_{i,j} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} M_{i,j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k-i+1}^{k} M_{i,j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} M_{i,j} = \sum_{s=0}^{k}\sum_{i=0}^{s} M_{i,s-i}.$$

- Pour la première égalité, partons du membre de droite et mettons le terme pour $i=0$ de la première somme à part :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} M_{i,j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k-i+1}^{k} M_{i,j} &= \sum_{j=0}^{k} M_{0,j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} M_{i,j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k-i+1}^{k} M_{i,j}\\ &= \sum_{j=0}^{k} M_{0,j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{k} M_{i,j}\\ &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} M_{i,j},\end{aligned}$$

où pour la dernière égalité on remarque que la somme de gauche est le terme pour $i=0$ de la double somme de droite.

- Pour la seconde égalité, en posant $s=i+j$ dans la seconde somme du membre de gauche, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} M_{i,j} &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{s=i}^{k} M_{i,s-i}\\ &= (M_{0,0}+M_{0,1}+\ldots+M_{0,k}) + (M_{1,0}+M_{1,1}+\ldots+M_{1,k-1}) + \cdots + (M_{k,0})\\ &= (M_{0,0}) + (M_{0,1}+M_{1,0}) + \cdots + (M_{0,k}+M_{1,k-1}+\ldots+M_{k,0})\\ &= \sum_{s=0}^{k}\sum_{i=0}^{s} M_{i,s-i}.\end{aligned}$$

Pour cette deuxième égalité, une seconde façon de voir est qu'après le changement d'indice, la double somme porte sur les indices i et s vérifiant $0 \leqslant i \leqslant s \leqslant k$, ce qui peut se réécrire $0 \leqslant s \leqslant k$ et $0 \leqslant i \leqslant s$.

Q41. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent.

En remarquant que $\exp(A)\exp(B) = \left(\sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!}A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j!}B^j\right)$ et en utilisant la question précédente, montrer que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

D'après **Q33**, on a $A^n = B^n = 0_n$ donc c'est aussi vrai pour tout exposant supérieur ou égal à n. En particulier, on peut écrire $\exp(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!}A^k$ et de même pour B.

Alors d'une part,

$$\begin{aligned}\exp(A)\exp(B) &= \left(\sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!}A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j!}B^j\right) = \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{i!}A^i\frac{1}{j!}B^j\\ &\overset{\textbf{Q40}}{=} \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n-i} \frac{1}{i!}A^i\frac{1}{j!}B^j + \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=2n-i+1}^{2n} \frac{1}{i!}A^i\frac{1}{j!}B^j\\ &= \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n-i} \frac{1}{i!}A^i\frac{1}{j!}B^j + 0_n, \qquad (\diamond)\end{aligned}$$

où la dernière double somme est nulle car soit $1 \leqslant i \leqslant n$ et alors $j \geqslant n+1$ donc $B^j = 0_n$, soit $n+1 \leqslant i \leqslant 2n$ et dans ce cas $A^i = 0_n$.

D'autre part, comme A et B commutent, d'après le binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
\exp(A+B) &= \sum_{s=0}^{2n} \frac{1}{s!}(A+B)^s \\
&= \sum_{s=0}^{2n} \frac{1}{s!} \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} A^i B^{s-i} \\
&= \sum_{s=0}^{2n} \frac{1}{\cancel{s!}} \sum_{i=0}^{s} \frac{\cancel{s!}}{i!(s-i)!} A^i B^{s-i} \\
&= \sum_{s=0}^{2n} \sum_{i=0}^{s} \frac{1}{i!} A^i \frac{1}{(s-i)!} B^{s-i}. \qquad (\diamond\diamond)
\end{aligned}$$

Enfin, d'après la deuxième égalité de la question précédente, $(\diamond)$ et $(\diamond\diamond)$ sont égales, c'est-à-dire $\boxed{\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)}$.

Q42. En déduire que si $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ alors $\exp(N) \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ et déterminer son inverse.

Comme les matrices N et $-N$ commutent, d'après la question précédente

$$\exp(N)\exp(-N) = \exp(N-N) = \exp(0_n) \overset{\textbf{Q38}}{=} \mathrm{I}_n.$$

En particulier, $\boxed{\exp(N) \text{ est inversible}}$ et $\boxed{(\exp(N))^{-1} = \exp(-N)}$.

Q43. On définit $E = \{\exp(M) \mid M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})\}$. L'ensemble E est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Par définition tout élément de E est de la forme $\exp(M)$ avec $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, une telle matrice est toujours inversible. En particulier, comme la matrice nulle 0_n n'est pas inversible, $0_n \notin E$ donc $\boxed{E \text{ n'est pas un espace vectoriel}}$.

Q44. On dit qu'une matrice est **unipotente** si elle s'écrit comme la somme de la matrice identité et d'une matrice nilpotente.
Montrer que l'exponentielle d'une matrice nilpotente est unipotente.

Soit $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$. Par définition, $\exp(N) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}N^k = \mathrm{I}_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}N^k$. Or comme N est nilpotente, il en est de même pour toute matrice de la forme N^k avec $k \geqslant 1$ et donc aussi pour $\frac{1}{k!}N^k$. De plus, deux matrices de cette forme commutent, donc d'après **Q37**, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}N^k$ est aussi nilpotente. Ainsi $\exp(N) = \mathrm{I}_n + P$ avec P nilpotente, *i.e.* tout matrice de la forme $\boxed{\exp(N) \text{ est unipotente}}$.